Estatística I

Licenciatura em Gestão e Licenciatura em Finanças

2.º Ano/2.º Semestre

2023/2024

Aulas Teóricas N.os 15 e 16 (Semana 9)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)
• **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas • **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

Distribuição Uniforme Contínua

1

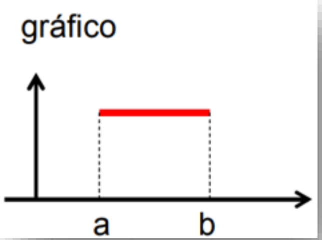
Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme com parâmetros a e b, a < b, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: X ~ U(a,b)



Formulário

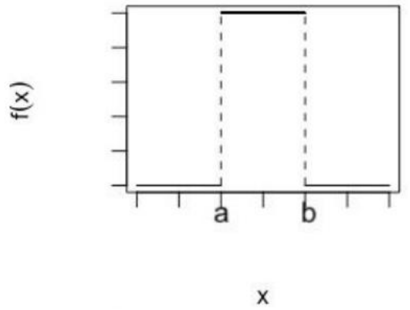
- **UNIFORME (CONTÍNUA)** $X \sim U(\alpha,\beta)$, $(\alpha < \beta)$

$$f(x\,|\,\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta-\alpha} \quad \alpha < x < \beta \;;\quad E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2};\; \mathrm{Var}(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12};\; M_X(s) = \frac{e^{s\beta}-e^{s\alpha}}{s(\beta-\alpha)}, \quad s \neq 0$$

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com **Distribuição Uniforme** pode ser escrita destas duas formas.

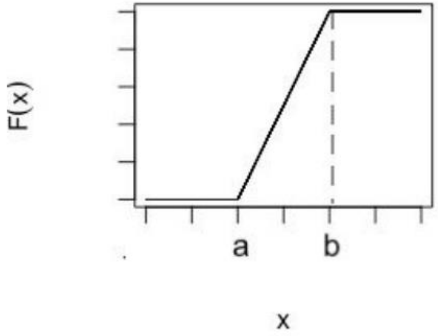
Distribuição Uniforme

Função densidade de probabilidade



Função distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Valor esperado e variância

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$

Distribuição Uniforme

Uniforme (0, 1)

O caso $\alpha = 0, \beta = 1$, isto é, $X \sim U(0,1)$, é o de **maior interesse**

$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{outros } x) \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \le x < 1) \\ 1 & (x \ge 1) \end{cases}$
$E(X^k) = \dfrac{1}{(k+1)}$ logo $E(X) = \dfrac{1}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{12}, \quad \gamma_1 = 0$	

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

Distribuição Uniforme

- **Teorema 5.4 – Transformação uniformizante – resultado particularmente importante em problemas de simulação.**

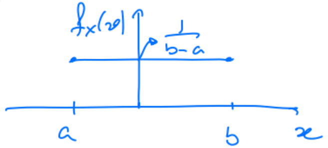
  Este resultado mostra que, em certas condições, $Y = F_X(X) \sim U(0,1)$ e inversamente que se $Y \sim U(0,1)$ então $X = F_X^{-1}(Y) \sim F_X(x)$

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

Distribuição Uniforme: Resumindo...

i) $X \sim \text{Uniforme}(a,b)$ [lê-se: X tem distribuição uniforme no intervalo (a,b)]

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, a \le x \le b$$



$$E(X) = \frac{b+a}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$\left(\int_a^b \frac{1}{b-a}\, dx = 1 \right.$ ⇒ a função está bem definida$\left.\right)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\, dy = \frac{x-a}{b-a} & a < x \le b \\ 1.0 & x > b \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

$$Var(X) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)^2} - \frac{(b+a)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuição Uniforme Contínua: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

2

Exemplo: A densidade de uma peça de certa material pode ser considerada uma v.a. uniforme no intervalo (10,20). Qual a probabilidade de que uma peça dessas tenha densidade entre 12 e 16?

Exercício: Distribuição Uniforme

X : densidade da peça

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20-10}, & 10 \leq x \leq 20 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$P(12 < X < 16) = \int_{12}^{16} f(x)\,dx = \int_{12}^{16} \frac{1}{10}\,dx$$

$$= \frac{x}{10}\Big|_{12}^{16} = \frac{16-12}{10} = 0,40$$

Distribuição Normal

3

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Normal ou Gaussiana

A v. a. X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2 se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Formulário

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$$

Pode ser mostrado que:

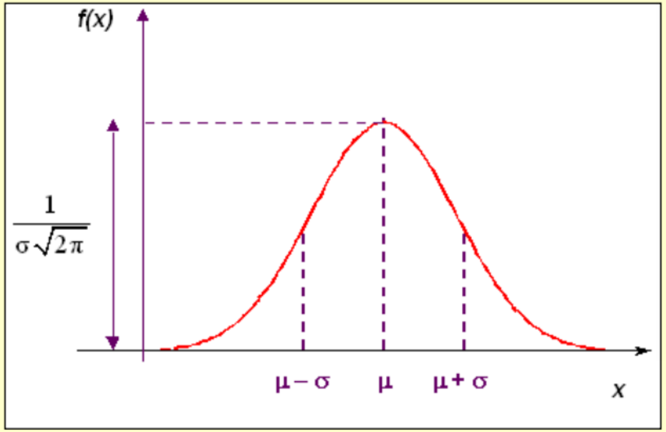
1. μ é o valor esperado (média) de X, com $-\infty < \mu < \infty$;
2. σ^2 é a variância de X, com $\sigma^2 > 0$.

Distribuição Normal (usp.br)

Notação : $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$

Distribuição Normal: Propriedades

Propriedades de $X \sim N(\mu;\ \sigma^2)$

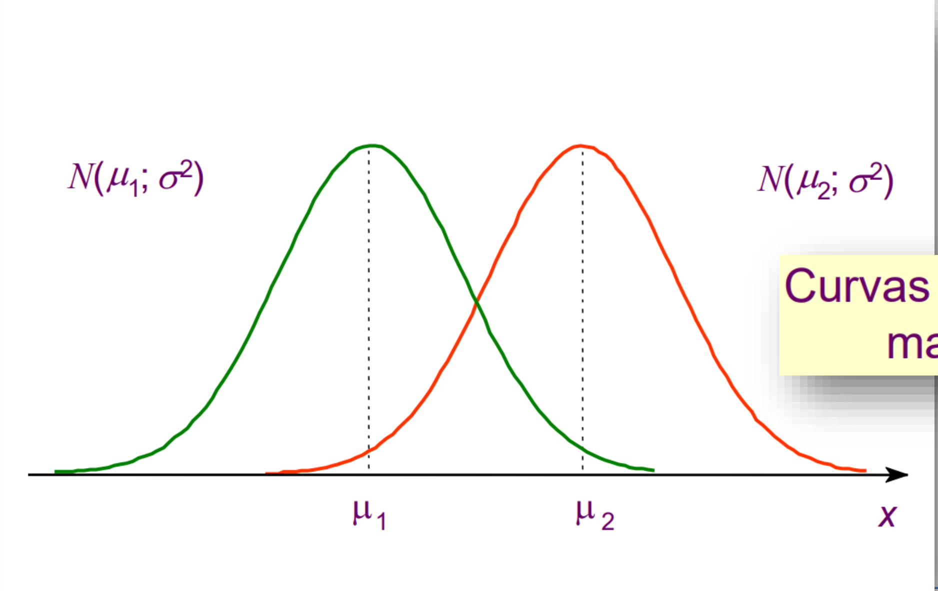


- $E(X) = \mu$ (média ou valor esperado);
- $Var(X) = \sigma^2$ (e portanto, $DP(X) = \sigma$);
- $f(x) \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow \pm\infty$;
- $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x)$;
- $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x)$;
- a curva Normal é simétrica em torno da média μ.

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Valor Médio

A distribuição Normal depende dos parâmetros μ e σ^2

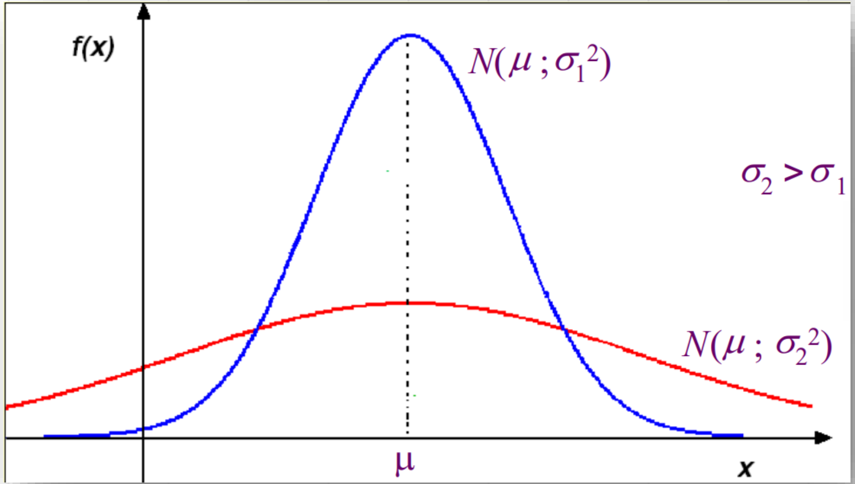


Curvas Normais com mesma variância σ^2 mas médias diferentes ($\mu_2 > \mu_1$).

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Variância

Influência de σ^2 na curva Normal



Curvas Normais com mesma média μ mas com variâncias diferentes ($\sigma_2 > \sigma_1$).

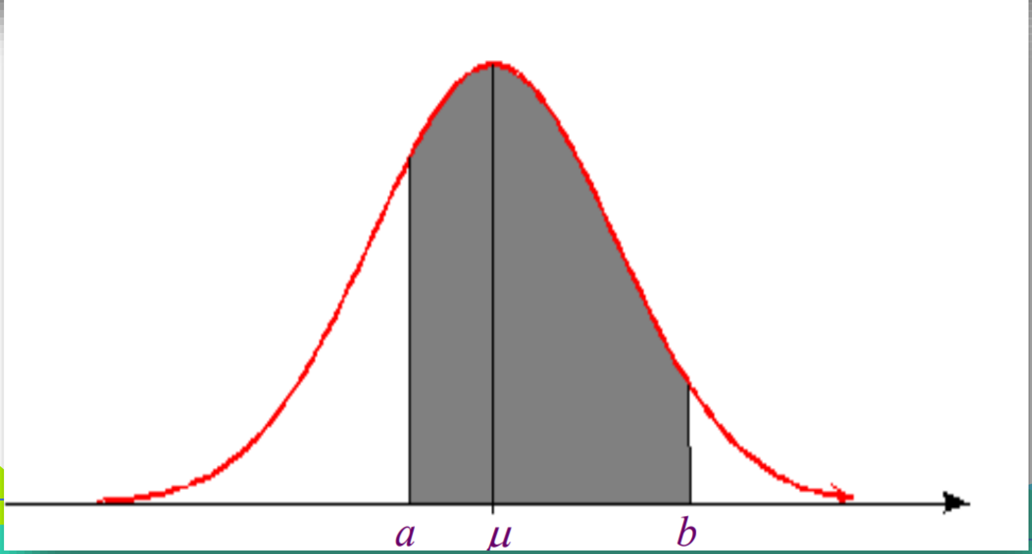
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Cálculo de Probabilidades

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

$$\Downarrow$$

Área sob a curva e acima do eixo horizontal (x) entre a e b.



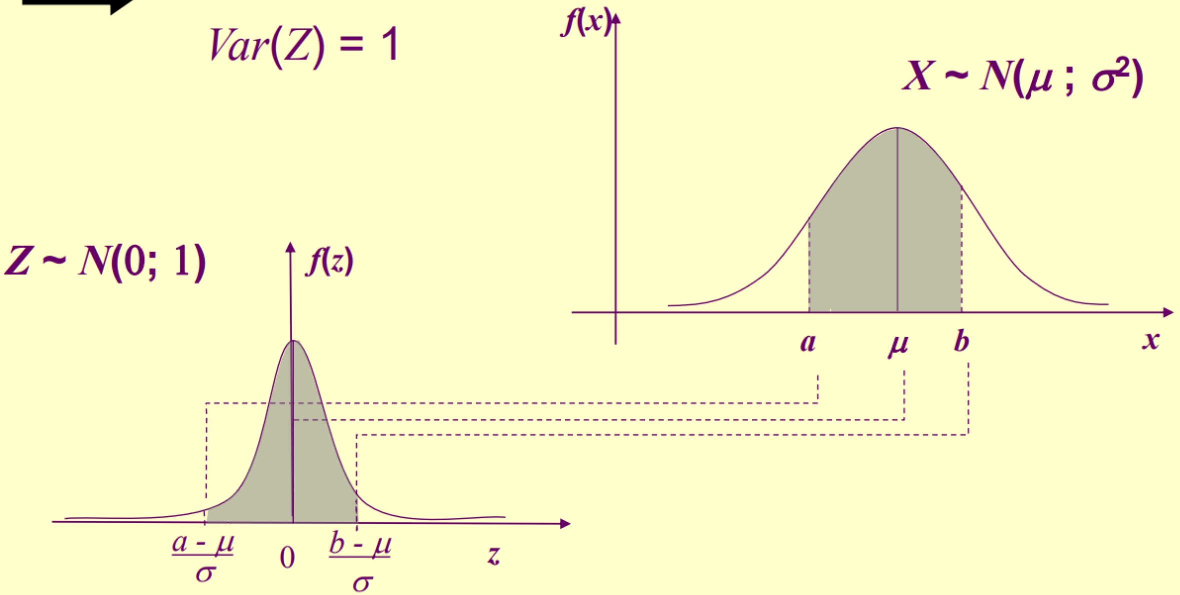
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Z ~ N(0,1)

Se $X \sim N(\mu\,;\sigma^2)$, definimos $\boxed{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}}$

$\Rightarrow$ $E(Z) = 0$

$Var(Z) = 1$



Distribuição Normal (usp.br)

Não é possível apresentar a imagem.

Distribuição Normal Padrão: Z ~ N(0,1)

A v.a. $Z \sim N(0;1)$ denomina-se ***normal padrão*** ou ***reduzida***.

Portanto,

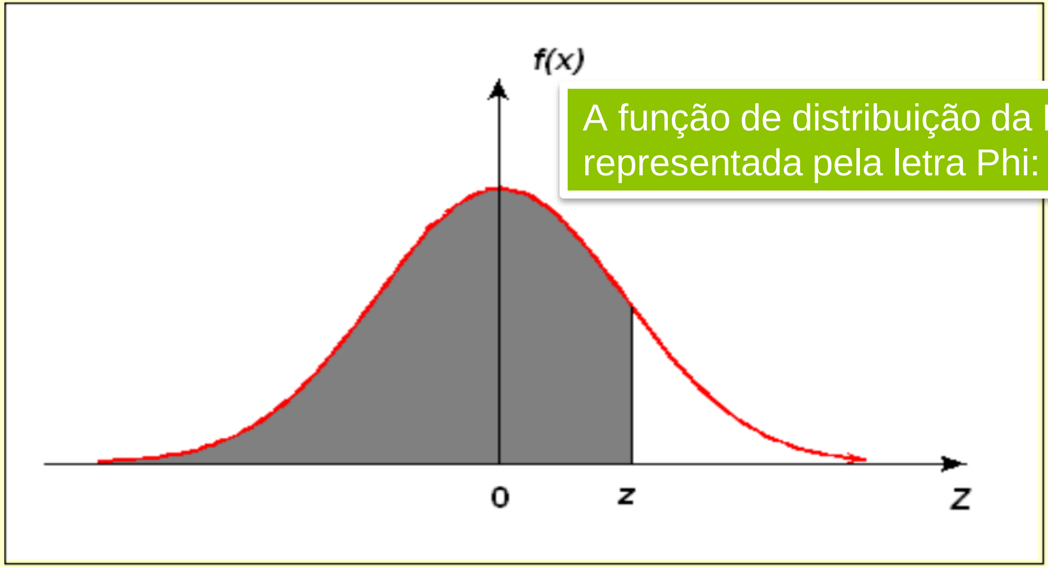
$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Dada a v.a. $Z \sim N(0;1)$ podemos obter a v.a. $X \sim N(\mu;\ \sigma^2)$ através da transformação inversa

$$X = \mu + Z \times \sigma.$$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades



A função de distribuição da Normal Padrão é representada pela letra Phi: $P(Z \leq z) = F(z) = \Phi(z)$

Distribuição Normal (usp.br)

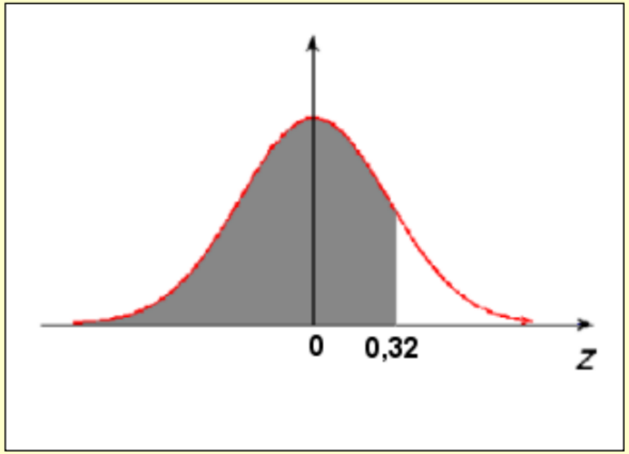
Denotamos : $A(z) = P(Z \leq z)$, para $z \geq 0$.

Não é possível apresentar a imagem.

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

Exemplo: Seja $Z \sim N(0;\ 1)$, calcular

a) $P(Z \leq 0{,}32)$



Distribuição Normal (usp.br)

$$P(Z \leq 0{,}32) = A(0{,}32) = 0{,}6255.$$

Distribuição Normal Padrão: Tabela

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999064	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999533	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999650
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999821	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999930	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.0	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978

$P(Z \leq 0{,}32) = 0{,}6255$

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

$P(-a < Z < a) = \Phi(a) - \Phi(-a)$
$P(Z < -a) = \Phi(-a) = 1-\Phi(a)$
sendo "a" uma constante positiva e Φ (Phi) a fd da Distribuição Normal Padrão

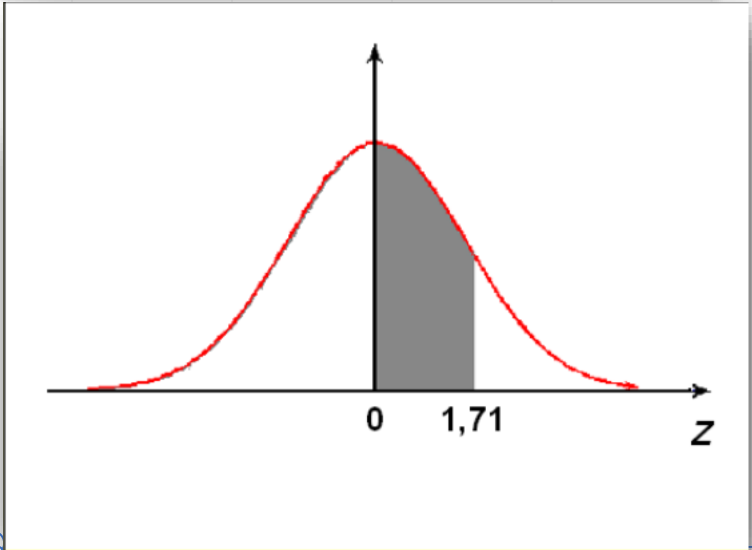
b) $P(0 < Z \leq 1{,}71)$

$= P(Z \leq 1{,}71) - P(Z \leq 0)$

$= A(1{,}71) - A(0)$

$= 0{,}9564 - 0{,}5 = 0{,}4564.$

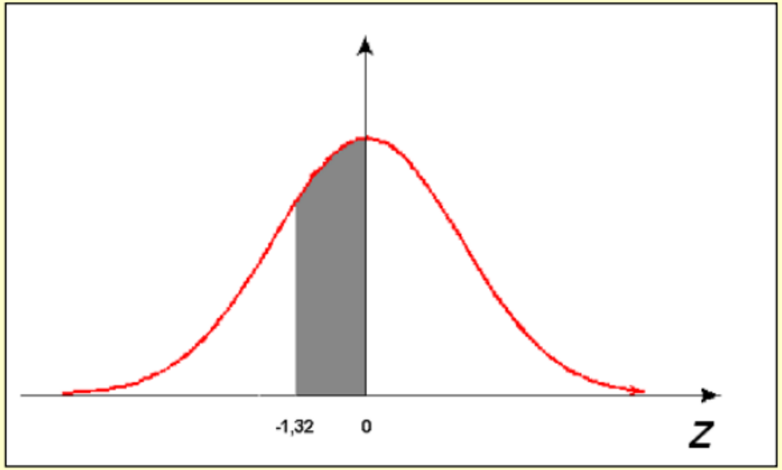
Obs.: $A(0)=P(Z < 0)=P(Z > 0)=0{,}5.$



Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

c) $P(-1{,}32 < Z < 0) = P(0 < Z < 1{,}32)$



$= P(Z \leq 1{,}32) - P(Z \leq 0)$

$= A(1{,}32) - 0{,}5$

$= 0{,}9066 - 0{,}5 = 0{,}4066.$

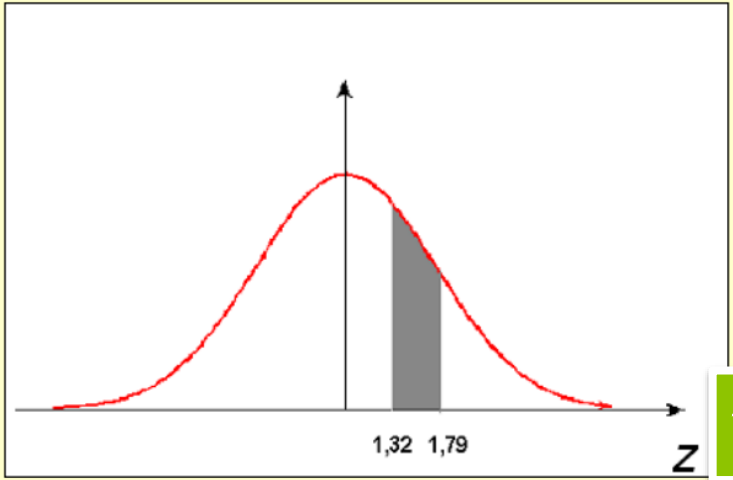
Tabela

Alternativa, $P(-1{,}32 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1{,}32) = \Phi(0) - [1 - \Phi(1{,}32)] = 0{,}5 - 1 + 0{,}9066 = 0{,}4066$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

d) $P(1{,}32 < Z \leq 1{,}79)$



$= P(Z \leq 1{,}79) - P(Z \leq 1{,}32)$

$= A(1{,}79) - A(1{,}32)$

$= 0{,}9633 - 0{,}9066 = 0{,}0567.$

Alternativa, $P(1{,}32 < Z \leq 1{,}79) = \Phi(1{,}79) - \Phi(1{,}32)$
$= 0{,}9633 - 0{,}9066 = 0{,}0567$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

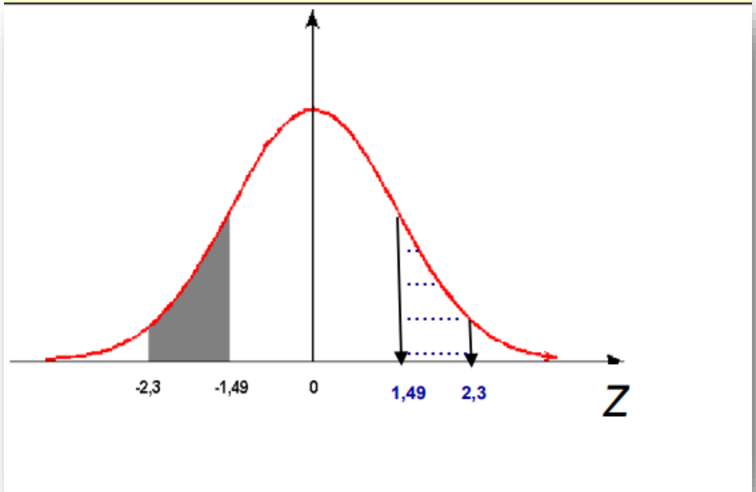
e) $P(\ -2{,}3 < Z \leq -1{,}49)$

$= P(1{,}49 \leq Z < 2{,}3)$

$= A(2{,}3) - A(1{,}49)$

$= 0{,}9893 - 0{,}9319$

$= 0{,}0574.$



Distribuição Normal (usp.br)

Alternativa, P(-2,3 < Z ≤ -1,49) = $\Phi(-1{,}49) - \Phi(-2{,}3)$ = $[1 - \Phi(1{,}49)] - [1 - \Phi(2{,}3)]$= 0,0574

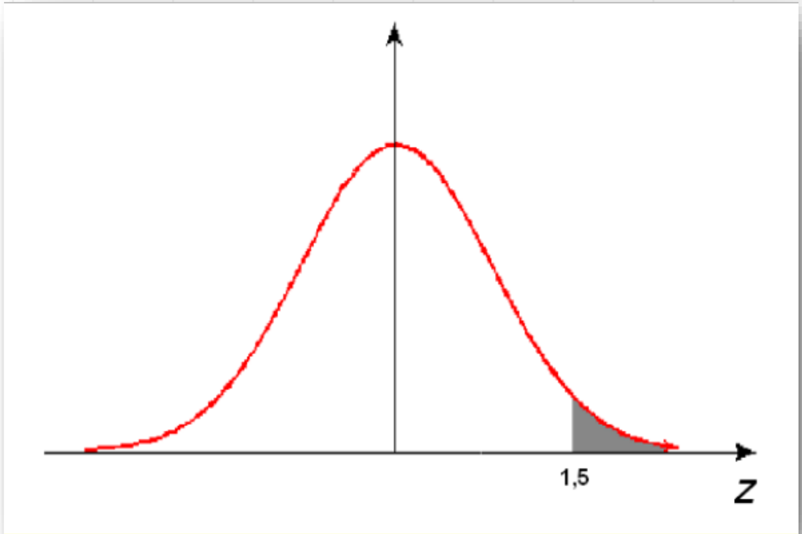
Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

f) $P(Z \geq 1{,}5)$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

$= 1 - A(1{,}5)$

$= 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668.$



Distribuição Normal (usp.br)

Alternativa, $P(Z \geq 1{,}5) = 1\text{-}\Phi(1{,}5) = 0{,}0668$

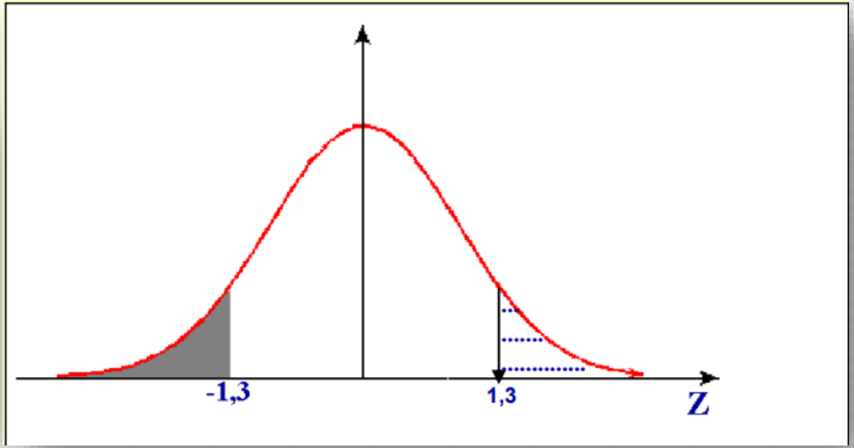
Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

g) $P(Z \leq -1{,}3)$

$= P(Z \geq 1{,}3) = 1 - P(Z \leq 1{,}3)$

$= 1 - A(1{,}3)$

$= 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968.$



Distribuição Normal (usp.br)

Obs.: Pela simetria, $P(Z \leq -1{,}3) = P(Z \geq 1{,}3)$.

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

h) $P(-1,5 \leq Z \leq 1,5)$

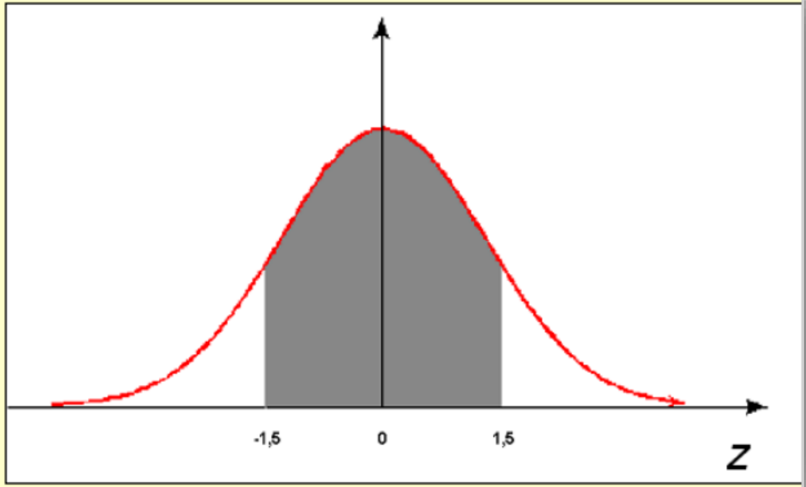
$= P(Z \leq 1,5) - P(Z \leq -1,5)$

$= P(Z \leq 1,5) - P(Z \geq 1,5)$

$= P(Z \leq 1,5) - [1 - P(Z \leq 1,5)]$

$= 2 \times P(Z \leq 1,5) - 1 = 2 \times A(1,5) - 1$

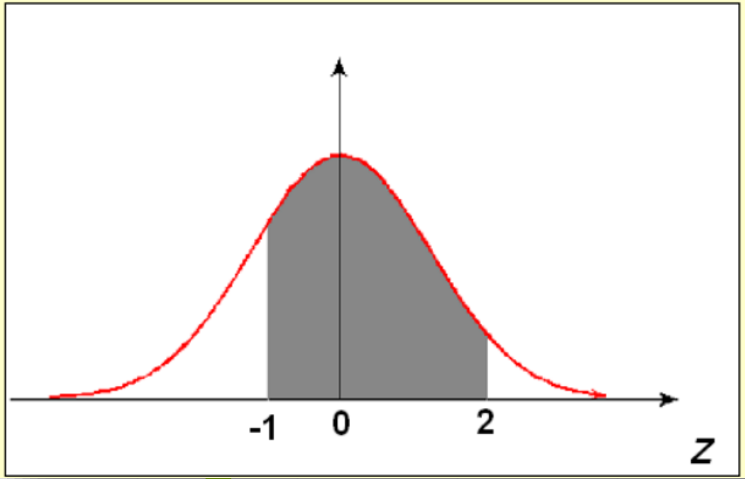
$= 2 \times 0,9332 - 1 = 0,8664.$



Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

i) $P(-1 \leq Z \leq 2)$



$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$

$= A(2) - P(Z \geq 1) = A(2) - (1 - A(1))$

$= 0{,}9773 - (1 - 0{,}8413)$

$= 0{,}9773 - 0{,}1587 = 0{,}8186.$

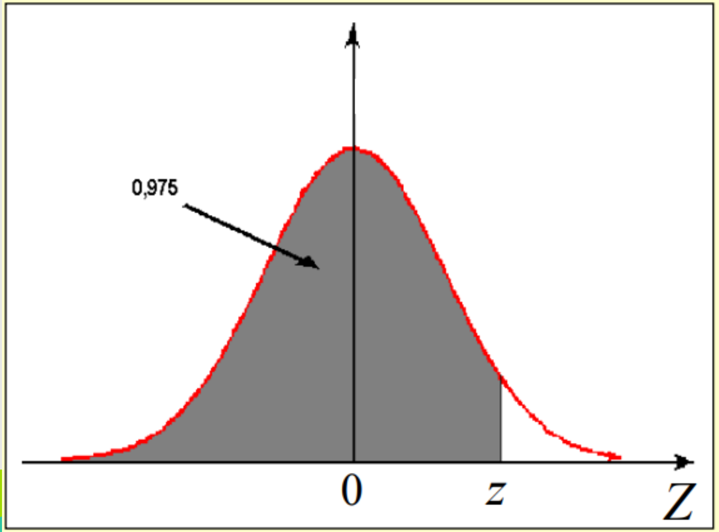
Tabela

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(i) $P(Z \leq z) = 0{,}975$



z é tal que $A(z) = 0{,}975$.

Pela tabela, $z = 1{,}96$.

Alternativa, $P(Z \leq z) = 0{,}975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}975$
$\Leftrightarrow z = \Phi(0{,}975)^{-1} = 1{,}96$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Tabela

Quantis

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.3	.9032	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.4	.9192	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

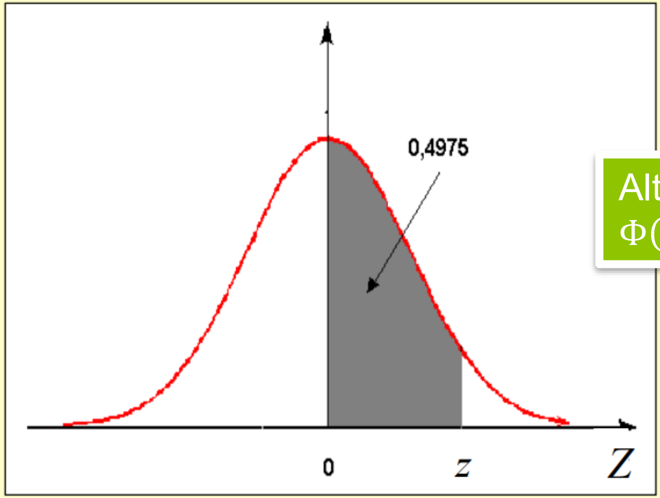
$P(Z \leq z) = 0{,}975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}975 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}975)^{-1} = 1{,}96$

Probabilidades

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(ii) $P(0 < Z \leq z) = 0{,}4975$



z é tal que $A(z) = 0{,}5 + 0{,}4975 = 0{,}9975$.

Pela tabela $z = 2{,}81$. Tabela

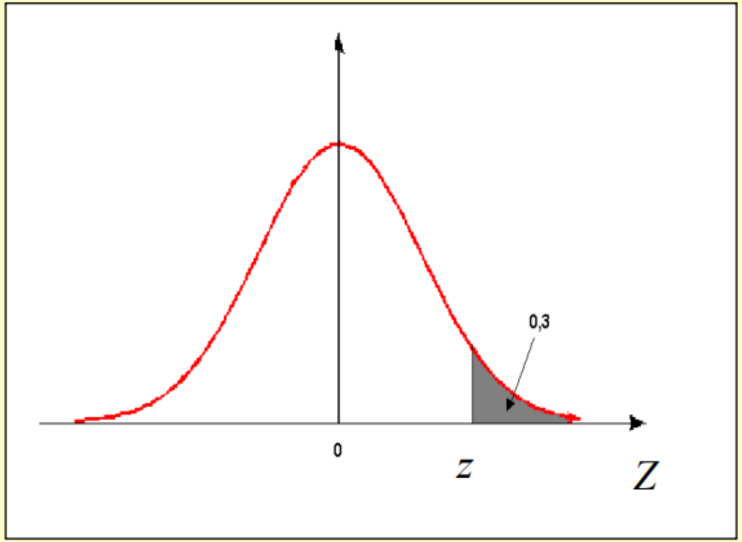
Alternativa, $P(0 < Z \leq z) = 0{,}4975 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(0) = 0{,}4975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}4975 + 0{,}5 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}9975)^{-1} = 2{,}81$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(iii) $P(Z \geq z) = 0,3$



z é tal que $A(z) = 0,7$.

Pela tabela, $z = 0,53$.

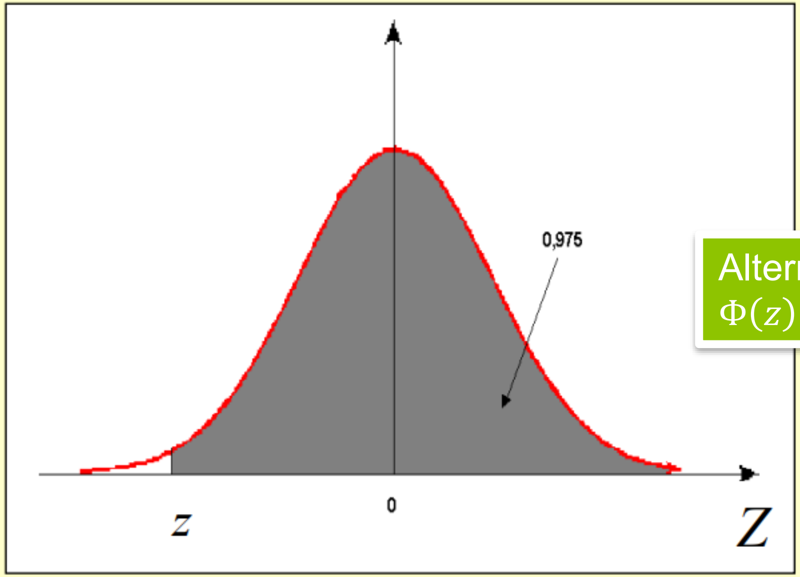
Alternativa, $P(Z \geq z) = 0,3 \Leftrightarrow 1 - \Phi(z) = 0,3 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,7 \Leftrightarrow z = \Phi(0,7)^{-1} = 0,53$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(iv) $P(Z \geq z) = 0{,}975$



a é tal que $A(a) = 0{,}975$ e $z = -a$.

Pela tabela $a = 1{,}96$.

Então, $z = -1{,}96$.

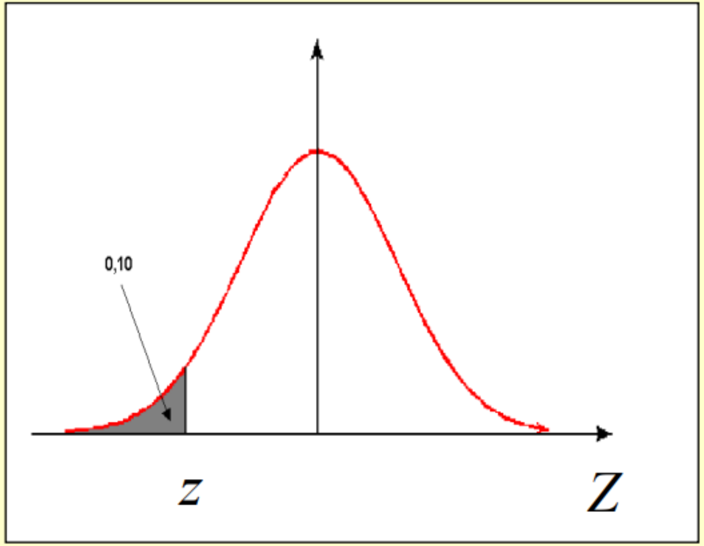
Alternativa, $P(Z \geq z) = 0{,}975 \Leftrightarrow 1 - \Phi(z) = 0{,}975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}025 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}025)^{-1} = -\Phi(0{,}975)^{-1} = -1{,}96$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(v) $P(Z \leq z) = 0,10$



a é tal que $A(a)=0,90$ e $z = -a$.

Pela tabela, $a = 1,28$

e, assim, $z = -1,28$.

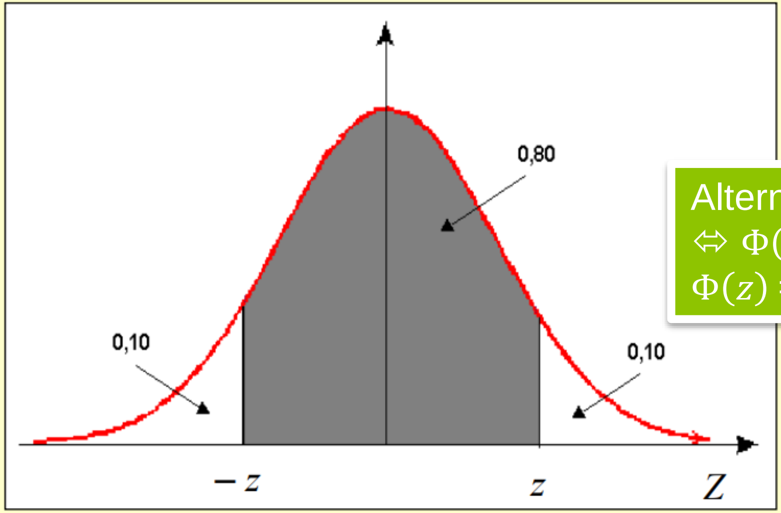
Alternativa, $P(Z \leq z) = 0,10 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,10 \Leftrightarrow z = \Phi(0,1)^{-1} = -\Phi(0,9)^{-1} = -1,28$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(vi) $P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}80$



z é tal que $P(Z < -z) = P(Z > z) = 0{,}1.$

Isto é, $P(Z < z) = A(z) = 0{,}90$

$\Rightarrow z = 1{,}28$ (pela tabela).

Tabela

Alternativa, $P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}80 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0{,}80$
$\Leftrightarrow \Phi(z) - [1 - \Phi(z)] = 0{,}80 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0{,}80 \Leftrightarrow$
$\Phi(z) = 0{,}9 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}9)^{-1} = 1{,}28$

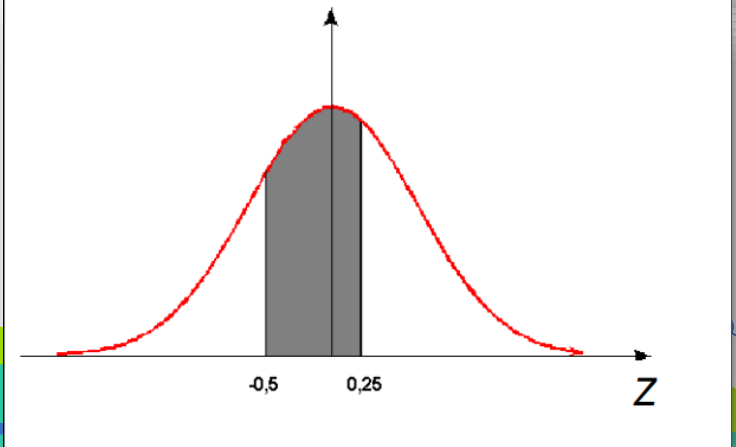
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Probabilidades

Exemplo: Seja $X \sim N(10\ ;\ 64)$ ($\mu = 10$, $\sigma^2 = 64$ e $\sigma = 8$)

Calcular: (a) $P(6 \leq X \leq 12)$

$$= P\left(\frac{6-10}{8} < \frac{X-10}{8} < \frac{12-10}{8}\right) = P(-0{,}5 < Z < 0{,}25)$$



$= A(0{,}25) - (1 - A(0{,}5))$

$= 0{,}5987 - (1 - 0{,}6915)$

$= 0{,}5987 - 0{,}3085 = 0{,}2902$

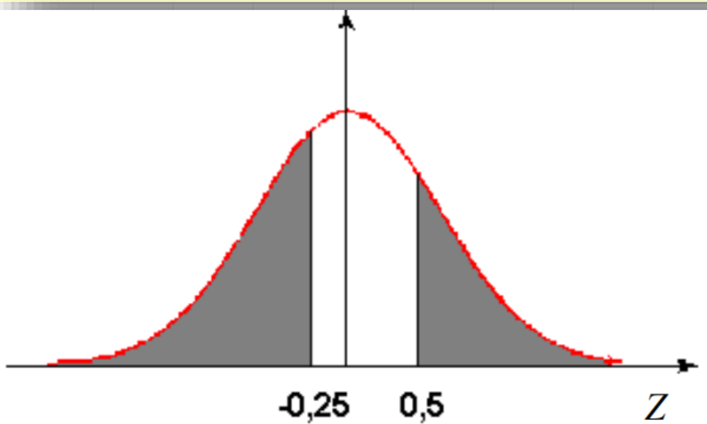
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Probabilidades

(b) $P(\ X \leq 8$ ou $X > 14)$

$$P(X \leq 8) + P(X > 14) = P\left(Z \leq \frac{8-10}{8}\right) + P\left(Z > \frac{14-10}{8}\right)$$

$$= P(Z < -0{,}25) + P(Z > 0{,}5)$$



$= 1 - A(0{,}25) + 1 - A(0{,}5)$

$= 1 - 0{,}5987 + 1 - 0{,}6915$

$= 0{,}7098$

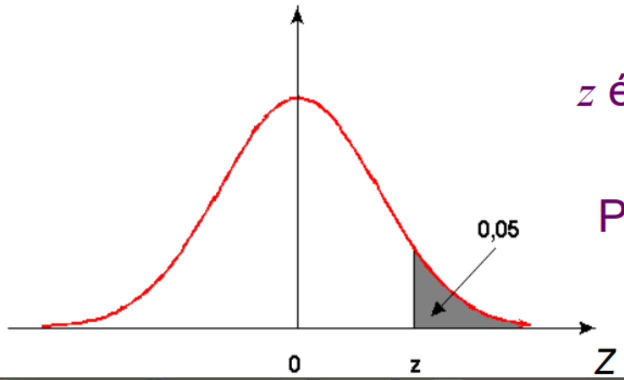
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Quantis

c) k tal que $P(X \geq k) = 0{,}05$

z

$$P(X \geq k) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(\frac{X - 10}{8} \geq \frac{k - 10}{8}\right) = P\left(Z \geq \frac{k - 10}{8}\right) = 0{,}05.$$



z é tal que $A(z) = 0{,}95$

Pela tabela $z = 1{,}64$

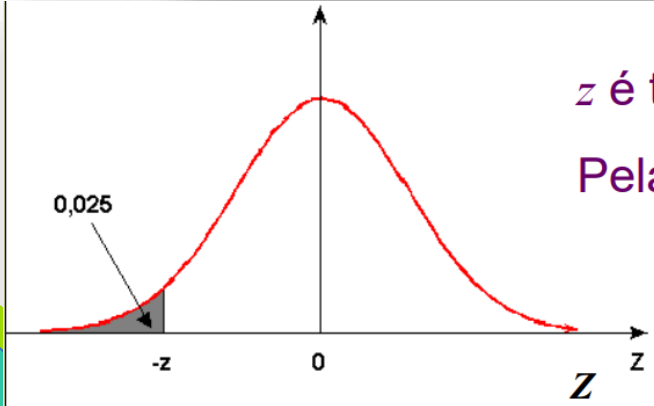
Então, $z = \dfrac{k - 10}{8} = 1{,}64.$

Logo $k = 10 + 1{,}64 \times 8 = 23{,}12.$

Distribuição Normal: Quantis

d) k tal que $P(X \leq k) = 0{,}025$

$$P(X \leq k) = 0{,}025 \Rightarrow P\left(\frac{X - 10}{8} \leq \frac{k - 10}{8}\right) = P\left(Z \leq \frac{k - 10}{8}\right) = 0{,}025.$$



z é tal que $A(z) = 0{,}975$.

Pela tabela, $z = 1{,}96$.

Então, $\dfrac{k - 10}{8} = -z = -1{,}96.$

Logo $k = 10 - 1{,}96 \times 8 = -5{,}68.$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Probabilidades

Observação : Se $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$, então

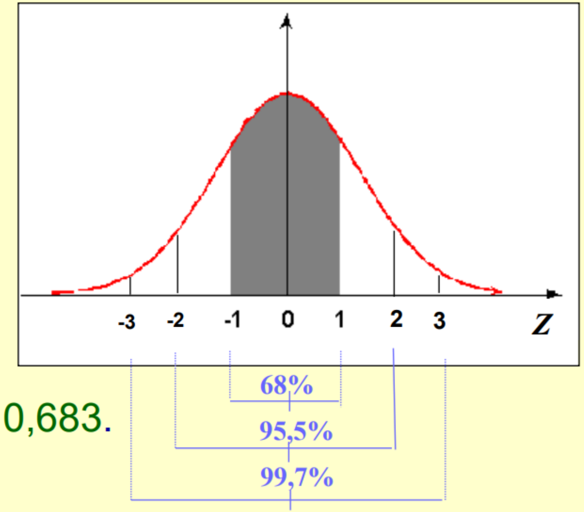
$$\text{(i)}\,P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = P\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P(-1 \le Z \le 1)$$

$$= 2\times(A(1) - 0{,}5)$$

$$= 2\times(0{,}8413 - 0{,}5)$$

$$= 0{,}6826$$



ou seja, $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = 0{,}683$.

Distribuição Normal (usp.br)

(ii) $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = P(-2 \le Z \le 2) = 0{,}955$.

(iii) $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = P(-3 \le Z \le 3) = 0{,}997$.

Tabela

Distribuição Normal: Resumo...

Formulário

- **NORMAL** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $(-\infty < \mu < +\infty, \quad 0 < \sigma < +\infty)$

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$E(X) = \mu \,;\; \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \,;\; M_X(s) = \exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\} ;\; \gamma_1 = 0 \,;\; \gamma_2 = 3$$

Função geradora de momentos

$M_X(t) = E(e^{tX})$,

$M_X^{(n)}(t)\big|_{t=0} = E(X^n)$

Propriedades:

- Normal estandardizada $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$; $\phi(z) = \phi(-z)$ e $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$
- $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ independentes $\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim N\left(k\mu, k\sigma^2\right)$ e $\bar{X} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{k}\right)$
- $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ com $\mu_Y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i$ e $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \sigma_i^2$

Distribuição Normal: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

4

Exemplo : O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 min e desvio padrão 15 min.

a) Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é a probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos?

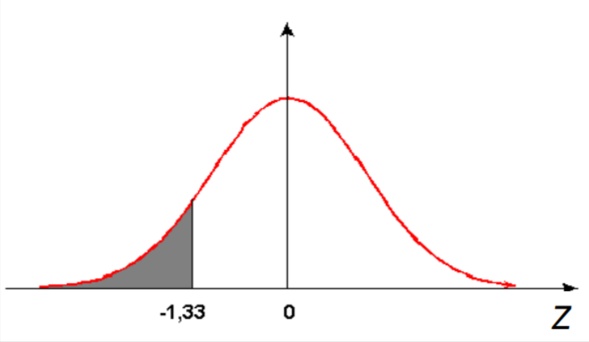
b) Qual deve ser o tempo de prova, de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

c) Qual é o intervalo de tempo, simétrico em torno da média (intervalo central), tal que 80% dos estudantes gastam para completar o exame?

Exercício 1 (a): Probabilidades

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120;\, 15^2)$

$$P(X \leq 100) = P\left(Z \leq \frac{100-120}{15}\right) = P(Z \leq -1{,}33)$$



$= 1 - A(1{,}33)$

$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918.$

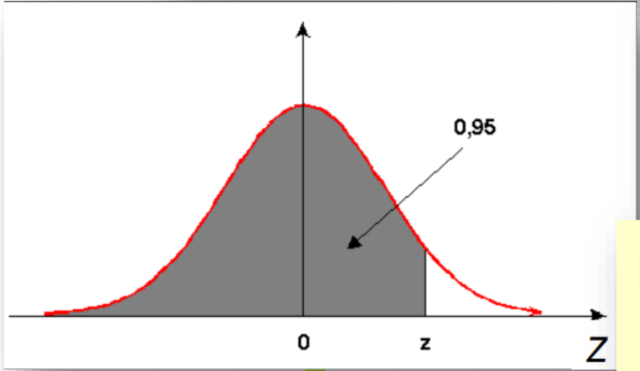
Distribuição Normal (usp.br)

Alternativa, P(Z ≤ -1,33) $= \Phi(-1{,}33) = 1 - \Phi(1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

Exercício 1 (b): Distribuição Normal - Quantis

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120;\, 15^2)$

$$P(X \le x) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{x - 120}{15}\right) = 0{,}95$$



z = ? tal que $A(z)$ = 0,95.

Pela tabela z = 1,64.

Distribuição Normal (usp.br)

Então, $z = 1{,}64 = \dfrac{x - 120}{15}$ $\Rightarrow x = 120 + 1{,}64 \times 15$

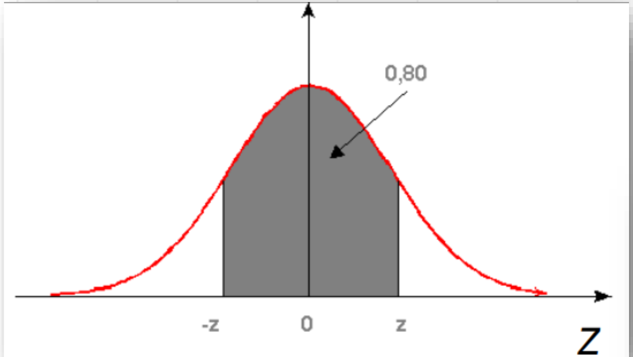
$\Rightarrow x = 144{,}6\ min.$

Alternativa, P(Z ≤ (x-120)/15) = 0,95 ⇔ $\Phi((x-120)/15) = 0{,}95$ ⇔ $(x-120)/15 = \Phi(0{,}95)^{-1}$ ⇔ $(x-120)/15 = 1{,}64$ ⇔ x = 144,6 minutos

Exercício 1 (c): Distribuição Normal - Quantis

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120,\ 15^2)$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0{,}80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0{,}80$$



z = ? tal que $A(z) = 0{,}90$.

Pela tabela, $z = 1{,}28$.

Distribuição Normal (usp.br)

$$-z = \frac{x_1 - 120}{15} = -1{,}28 \Rightarrow x_1 = 120 - 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_1 = 100{,}8\ min.$$

$$z = \frac{x_2 - 120}{15} = 1{,}28 \Rightarrow x_2 = 120 + 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_2 = 139{,}2\ min.$$

Obrigada!

Questões?